IA : TAMBA | Prof : M. DRAME

Lycée : Koumpentoum | Classe : $1^{ere}S_2$

Année : 2020-2021 | Chapitre : Polynôme

SERIE D'EXERCICES

EXERCICE 1:

1°) On donne le polynôme P(x) :

$P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2.$

Démontrer que P(x) est divisible par x – 1 et par x – 2 puis factoriser P(x).

2°) On donne $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2.$

Résoudre l'équation P(x) = 0 sachant que P(x) a deux racines opposées.

EXERCICE 2 :

A) On donne le polynôme :

$P(x) = x^4 + px^2 + q$, p et q sont des réels.

Déterminer p et q de manière que P(x) soit divisible par $x^2 - 6x + 5$.

B) Soit le polynôme $P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 1.$

1°) Trouver les réels a et b tel que le polynôme P(x) soit divisible par $(x-1)^2$.

2°) Résoudre alors P(x) = 0.

3°) En déduire les solutions de $P(2x-1) = 0$ et $P(2x-1) > 0$

EXERCICE 3 :

A) Les restes de la division euclidienne d'un polynôme P(x) par x – 1 et par x – 2 sont respectivement 6 et 18.

Déterminer le polynôme reste de la division de P(x) par (x – 1)(x – 2).

B) Soit P(x) et Q(x) deux polynômes tel que

P(x) = Q(x) + 1

soit le polynôme $T(x) = [P(x)]^n + [Q(x)]^{2n} - 1$

Montrer que toutes racines de P(x) ou de Q(x) est racine de T(x).

C) Soit le polynôme $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$

a et b étant des réels.

a- Montrer que si β est une racine de P(x) alors β est non nulle.

b- Montrer que β est une racine de P(x) si et seulement si, $\frac{1}{\beta}$ est une racine de P(x).

EXERCICE 4 :

Soit l'équation (E) : $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. Démontrer que si α est une racine de (E) alors $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de (E).
3. Montrer que (E) est équivalent à (E') : $x^2 - 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$
4. Calculer $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.
5. En posant $X = x + \frac{1}{x}$, montrer que (E') se ramène a une équation du second degré.
6. Résoudre l'équation du second degré, puis en déduire les solutions de (E).

EXERCICE 5 :

1. Déterminer les polynômes de degré trois dont les divisions par (x – 1), par (x – 2), par (x – 3) ont le même reste (+36). Déterminer celui d'entre qui est divisible par (x + 4).

2. Soit $P(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$
   a) Calculer p(a), p(b) et p(c)
   b) En déduire que pour tout x réel p(x) = 1.

EXERCICE 6 :

Déterminer les réels a, b, et c dans les cas suivants :

1. Le polynôme $(cx - 2)^2 + ax + b$ soit nul pour tout x réel.

2. Pour tout x réel P(x) = Q(x) avec
   $P(x) = (a - 3)x^2 + (2b + c)x - 3a + b - 2$
   $Q(x) = x^2 - (a + b)x + 2c - 1$

3. Le polynôme $x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx + 4$, soit le carré d'un polynôme

EXERCICE 7 :

1. Déterminer un polynôme du second degré divisible
par (x — 2) et par (x + 1) et dont le reste
de la division par (x — 1) soit 5.

2. Déterminer un polynôme du troisième degré divisible par (x — 1) et par (x +2) , dont les restes respectifs des divisions par (x + 1) et (x — 3) soient 10 et 30 .

EXERCICE 8 :

1. Déterminer P(x), polynôme de degré 6, divisible par $(x-1)^3$, et tel que 1 + P(x) soit divisible par x^4.

2. Les restes respectifs des divisions d'un polynôme P(x) par (x — 1), par (x + 5) et par (x — 2) sont 9, — 39 et 3. Déterminer R(x), polynôme du second degré, tel que :
P(x) = (x — 1) (x + 5) (x — 2) Q(x) + R(x) , où Q(x) est un polynôme qu'on ne demande pas de déterminer.

EXERCICE 9 :

Soit le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a, b\ c\ et\ d$ étant des réels.

1. Déterminer d sachant que $P(0) = -12$.
2. Dans la suite on considère que : $P(0) = -12$ et (E) : $P(x+1) - P(x) = 3x^2 + x$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
   a. Calculer $P(1), P(-1) et\ P(2)$.
   b. Exprimer $P(1), P(-1) et\ P(2)$ en fonction de $a, b\ et\ c$.
   c. En déduire les valeurs de $a, b\ et\ c$.

EXERCICE 10:

1. Déterminer P(x) polynôme du second degré, tel que pour tout x réel : p(x) – p(x – 1) = x ;
en déduire la somme S = 1 + 2 + … + n

2. Déterminer q(x) polynôme de degré trois, tel que pour tout x réel : q(x) – q(x – 1) = x^2 + x ;
en déduire la somme S = 1x2 + 2x3 + … + nx(n+1)

3. Déterminer p(x) polynôme de degré trois, tel que pour tout x réel : p(x) – p(x – 1) = x^2 ;
en déduire la somme S = $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$

EXERCICE 11 :

On donne le polynôme $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$

1°) Montrer que ce polynôme est divisible par $(x-1)^2$.

2°) Déterminer le polynôme Q(x) tel que

P(x) = $(x-1)^2$Q(x) pour n = 1 ; n = 2.

EXERCICE 12 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer m pour que f (x) soit factorisable par g (x).

1°) f (x) = $x^4 + 5x^2 + 4x$ — m et g (x) = 2x + 1

2°) f (x) = $2x^4 + 4ax^3 - 5a^2x^2 - 3a^3x + ma^4$ et

g (x) = x — a

EXERCICE 13 :

Simplifier les quotients suivants :

$$A(x)=\frac{x^3-10x+3}{x^2-5x+6}$$

$$B(x)=\frac{2x^3+17x^2+20x-75}{x^3+9x^2+15x-25}$$

EXERCICE 14 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f puis trouver a, b et c tels que f (x) = g (x) $\forall x \in D_f$.

1. $f(x)=\frac{12x^2-37x+13}{(5x-2)(2x-1)^2}$ et $g(x)= \frac{a}{5x-2} + \frac{b}{(2x-1)^2}$

2. $f(x)=\frac{9x^2-16x+4}{x^3-3x^2+2x}$ et $g(x)= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$

Courage pour toujours